PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024–2025

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.

c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.

d) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.

e) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.

f) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.

g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

h) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

i) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Juan ha gastado 80e por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos. Sea x el precio del jersey, y el precio de la camisa y z el precio del pantalón.

a) **[1,25 puntos]** ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.

X+y+z=80, x=1/3 (y+z). Tenemos, por lo pronto, 2 ecuaciones y tres incógnitas, por tanto, a priori parece un sistema compatible indeterminado, pero aplicaremos el teorema de Rouché-Frobenius. La matriz normal es:

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $y\ la\ ampliada\ A'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 80\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$**, vemos que sus rangos coinciden, rango(A)=rango (A´)=2, pero el número de incógnitas es 3. Sistema compatible indeterminado. Las dos ecuaciones son:**

$\begin{cases}x+y+z=80\\ 3x-y-z=0\end{cases}$**, sumando ambas nos queda que 4x=80, por ello x=20 €, el jersey cuesta 20 €. Veamos la camisa:**

$\begin{cases}20+y+z=80\\ 60-y-z=0\end{cases}$, $\begin{cases}y+z=60\\ y+z=60\end{cases}$**, nos queda la misma ecuación, si z=λ, y=60-λ, no es posible determinar el precio de la camisa.**

b) **[1,25 puntos]** Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57e, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

Aquí nos están dando el precio del jersey, sería de x´=x-0,2 x= 20-20·0,3 €=14€, el 30% de descuento. Por ello:

$\begin{cases}y-0,4\,y+z-0,2z\ =57-14\\ y+z=60\end{cases}$**, que ya es compatible determinado, lo resolvemos por reducción:**

$\begin{cases}0,6y+0,8z=43\\ -0,6y-0,6z=-36\end{cases}$**, con lo cual 0,2z=7, z=35€, precio del pantalón antes de las rebajas, con ello y=80-20-35=25€ sería el precio de la camisa.**

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Aplicamos L´hôpital: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\, x - ax + 2 - 2cox}{e^x - xcosx - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - a + 2sen\, x}{e^x - \cos x + xsen\, x} = \frac{1-a}{1-1}$, para que sea finito 1-a tiene que ser cero, para seguir aplicando la regla de L´hôpital, con lo cual a=1, : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - a + 2sen\, x}{e^x - \cos x + xsen\, x} = \frac{-sen\, x + 2\cos x}{e^x + sen\, x + sen\, x - xcos\, x}$=2.

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Sea la función f: (0,+∞) →R definida por $f(x) = a + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

a) **[1 punto]** Calcula a para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f. Aplicamos L´hôpital para saber el limite en +∞, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2 + \ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} a + \frac{1/x}{2x} = a$, con lo cual a=1.

b) **[1,5 puntos]** Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Estudia y halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). Hay que estudiar el signo de la primera derivada, con lo cual la igualaremos a cero para estudiar los extremos relativos, y ver si son máximos o mínimos.

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ con lo cual $f´(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$, igualamos a cero, 1=2 ln x, $x = \sqrt{e}$, el punto: ($\sqrt{e}, \frac{1}{2e}$)=(x, f(x)). Si calculamos la derivada en x=1, veremos que es mayor que cero, la función es creciente en (0, $\sqrt{e}$]. Si hacemos la derivada en x=3, veremos que es menor que cero, la función es decreciente en [$\sqrt{e}, +\infty$). Luego el punto obtenido antes es un máximo absoluto.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Sean los puntos $O(0,0,0)$, $A(0,2,-2)$, $B(1,2,m)$ y $C(2,3,2)$.

a) **[1,25 puntos]** Halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los puntos O, A, B y C tenga un volumen de 3 unidades cúbicas. El volumen de un tetraedro viene dado por: V=1/6 $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$= $|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|$=3, planteamos el determinante, que es: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = |4m - 2|$, con lo cual |4m-2|=18, m=5 y como -4m+2=18, m=-4 también.

b) **[1,25 puntos]** Para $m = 0$, calcula la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A, B y C. Calculamos el plano que contiene a los tres puntos, definido por A, vector AB y vector AC: : $\begin{vmatrix} x-0 & 1 & 2 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z+2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$=2x+z+2=0, con lo cual la distancia será: d(O.plano)=$\frac{|2|}{\sqrt{2^2+0+1^2}}$=$\frac{2}{\sqrt{5}}$ u

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera el punto $P(1,1,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$.

a) **[1 punto]** Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r. Cogemos dos puntos de la recta , A(1,2,3) y B(0,0,1), elegimos x y deducimos los otros. Ahora calculamos los vectores PA y PB, $\overrightarrow{PA} = P - A = (0,1,2)$ y $\overrightarrow{PB} = P - B = (-1,-1,0)$ y los incluimos en el determinante:

: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$=0, el plano es 2x-2y+z-1=0.

b) **1,5 puntos]** Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r. Calculamos un punto genérico de r, (x,y,z)=(1,2,3) + λ(1,2,2), el punto es (1+λ, 2+2λ, 3+2λ), calculamos el vector que pasa por P y el punto genérico de la recta, (λ, 1+2λ, 2+2λ) y ahora sabemos que el producto escalar de ambos vectores dará 0, por ser ambas rectas perpendiculares: (λ, 1+2λ, 2+2λ)·(1,2,2)=0, con lo cual λ=-2/3, y la recta buscada es: (x,y,z)=(1,1,1) + λ´(-2/3, -1/3, 2/3)

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Halla la función $f: (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e-2-2\ln(2))$ y $(1,0)$, y verifica que $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$. Calculamos la derivada: $f´(x) = \int (e^{x-1} - \frac{1}{x})dx = e^{x} - \ln\, x + K_1$. Volvemos a integrar y obtenemos f: a: $f(x) = \int (e^{x-1} - \ln\, x + K_1)dx = e^{x-1} + K_1 x + \ K_2 + x - xlnx$, aplicando las condiciones obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en las dos constantes: $K_1+K_2=-2$; $2K_1+K_2=-4$; que da $K_2=0$ y $K_1=-2$. La función que buscamos es: f(x)= $e^{x-1} - x - xlnx$.

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

En la tabla siguiente se recoge el número de coches y motos que se presentaron a la ITV en el año 2023:

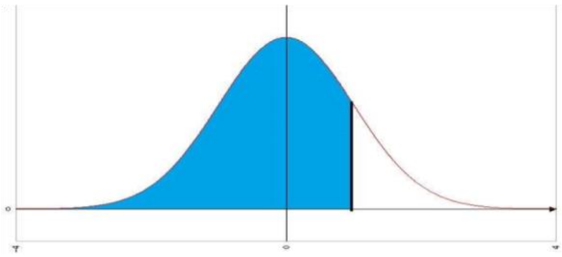
	Coches	Motos
Aptos	116.383	160.667
No aptos	2.679	3.447

Se elige un vehículo al azar de entre los coches y motos que se presentaron a dicha inspección.

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto? En este caso se trata de la probabilidad de la unión, P=P(A)+P(B)-P(A∩B)=0,58+0,978-0,57=0,99

b) **[1,25 puntos]** Si el vehículo elegido es un coche, ¿cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?. La probabilidad de no apto y coche es: P$(\frac{\bar{A}}{C}) = \frac{P(\bar{A} \cap C)}{P(C)} = \frac{2679}{116383+2679} = 0{,}0225$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN N(□,□)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria *Z* , con distribución N(0,1), esté por debajo del valor *z* .